www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

INSTITUT NATIONAL DE LA STATISTIQUE ET DES ETUDES ECONOMIQUES

JUIN 1990

CONCOURS D'ENTREE A L'ECOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ADMINISTRATION ECONOMIQUE

(OPTION MATHEMATIQUE)

PREMIERE COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

(Durée : 4 heures)

I- PREAMBULE

Dans tout le problème, u désignera un nombre réel.

On considère l'ensemble C_u des fonctions continues définies sur l'ensemble [0,1] et à valeurs réelles, telles que :

- $f(0) \neq u$
- $f(1) \neq u$
- f n'est constante égale à u sur aucun sous intervalle ouvert de [0,1].

Soit une fonction f appartenant à C_u ;

- on appelle point de "franchissement vers le haut" du niveau u, un point t_0 de l'intervalle]0,1[tel que :

$$\exists\, \varepsilon > 0 \;/\; \forall\, t \in]t_0 - \varepsilon,\, t_0[\;:\; f(t) < u$$

$$\forall\, t \in]t_0,\, t_0 + \varepsilon[\;:\; f(t) > u$$

- on appelle point de "franchissement vers le bas" du niveau u, un point t_0 de l'intervalle]0,1[tel que :

$$\exists\, \varepsilon > 0 \;/\; \forall\, t \in]t_0 - \varepsilon,\, t_0[\;:\; f(t) > u$$

$$\forall\, t \in]t_0,\, t_0 + \varepsilon[\;:\; f(t) < u$$

- on dit que f admet un point de "franchissement" du niveau u en $t_0 \in]0,1[$ si et seulement si dans tout voisinage de t_0, il existe t_1 et t_2 tels que :

$$[f(t_1) - u]\,[f(t_2) - u] < 0.$$

1 - Montrer qu'un point de franchissement vers le haut (resp. vers le bas) est un point de franchissement.

2 - Montrer que si t_0 est un point de franchissement du niveau u alors :

$$f(t_0) = u.$$

3 - Exemples élémentaires : on suppose u = 0. Indiquer si le point $t=\frac{1}{2}$ est un point de franchissement vers le haut, vers le bas, ou n'est pas un point de franchissement dans les cas suivants :

a) $f(x) = (x-\frac{1}{2})$,

b) $f(x) = (x-\frac{1}{2})^3$,

c) $f(x) = 2(x-\frac{1}{2}) + |x-\frac{1}{2}|$,

d) $f(x) = (x-\frac{1}{2})^2$,

e) $f(x) = |x-\frac{1}{2}|$.

Tournez la page S.V.P.

4 - Il existe des points de franchissement qui ne sont ni vers le haut, ni vers le bas. Montrer que sur tout voisinage d'un tel point de franchissement, f prend une infinité de fois la valeur u. Construire une fonction f présentant un tel exemple de point de franchissement.

5 - On appelle point de tangence du niveau u un point $t_o \in]0,1[$ tel que $f(t_0) = u$ et tel qu'en ce point f n'admet pas de point de franchissement du niveau u. Montrer qu'un point de tangence est un extremum local.

Soient t_1 et t_2 deux points de l'intervalle [0,1]. Montrer que si $f(t_1) > u$ et $f(t_2) < u$, il y a au moins un point de franchissement entre t_1 et t_2 (cette question nécessite une rédaction particulièrement rigoureuse).

II - POLYGONATION

Soit $f \in C_u$. On suppose que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant k \leqslant 2^n \quad f\left(\frac{k}{2^n}\right) \neq u.$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie par :

- f_n est affine sur tout intervalle $\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]$, $k = 0,1,\ldots,2^n-1$
- $\forall k = 0,\ldots,2^n,\ f_n\left(\frac{k}{2^n}\right) = f\left(\frac{k}{2^n}\right)$.

La fonction f_n est appelée polygonation d'ordre n de f.

1 - Montrer que $f_n \in C_u$. On note F_u et F_u^n respectivement les nombres de points de franchissement du niveau u par la fonction f et par la fonction f_n (ces nombres peuvent être infinis).

2 - Montrer : $F_u^n \leqslant F_u$.

3 - Montrer que la suite $\left(F_u^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (NB: il est possible d'utiliser la question précédente).

4 - On suppose que F_u est fini :

a) Montrer qu'il existe F_u intervalles ouverts disjoints $I_1,\ldots,I_{F_u}$ qui contiennent chacun un point de franchissement de niveau u et un seul.

b) Montrer que pour tout entier i compris entre 1 et F_u il existe deux intervalles ouverts J_i et K_i tels que :

$$J_i \subset I_i \ ; \ K_i \subset I_i$$

$$f-u > 0 \text{ sur } J_i \ ; \ f-u < 0 \text{ sur } K_i.$$

c) Montrer : $\lim_{n \to +\infty} F_u^n = F_u$

5 - On suppose que F_u est infini; montrer : $\lim_{n \to +\infty} F_u^n = +\infty$

En conclusion nous avons montré que dans tous les cas :

$$\lim_{n \to +\infty} F_u^n = F_u$$

.../...

III - INTEGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE

Si f est continue et I =]a,b[est un intervalle ouvert on posera :

$$\int_I f(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Soit maintenant f une fonction continue bornée sur]0,1[et $\mathcal{O}$ un ouvert de]0,1[.

1 - On suppose que $\mathcal{O}$ s'écrit : (*) $\mathcal{O} = \bigcup_{i=0}^{\infty} I_i$

où les I_i sont des intervalles ouverts disjoints ;

a) Montrer que $\sum_{i=0}^{\infty} \int_{I_i} f(x)\,dx$ converge.

b) Soit ψ une bijection de $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$; montrer que $\sum_{i=0}^{\infty} \int_{I_{\psi(i)}} f(x)\,dx$ converge vers la même limite.

c) On note cette limite $\int_{\mathcal{O}} f(x)\,dx$. Pourquoi cette notation est-elle cohérente ?

2 - Montrer que tout ouvert $\mathcal{O}$ de]0,1[peut s'écrire sous la forme (*).

IV - FONCTIONS DERIVABLES

On considère l'ensemble $\mathcal{D}_u$ qui est constitué des fonctions de C_u qui sont continûment dérivables.

A toute fonction $f \in \mathcal{D}_u$ on associe son nombre de points de tangence du niveau u sur]0,1[, noté T_u, et son nombre d'extrema locaux sur]0,1[, noté E (ces deux nombres peuvent être finis ou infinis).

Soit $f \in \mathcal{D}_u$ et δ un réel strictement positif qui dans toute la suite sera strictement inférieur à $\underline{\delta} = \inf(|f(0) - u|, |f(1) - u|)$

On pose : $\mathcal{O}_\delta = \{t \in]0,1[\ ; \ |f(t) - u| < \delta\}$

1 - Montrer que la famille $(\mathcal{O}_\delta)_{0<\delta<\underline{\delta}}$ est une famille croissante d'ouverts.

Soit $\mathcal{O}_\delta = \bigcup_{i \in A_\delta} I_i^\delta$ une décomposition de $\mathcal{O}_\delta$ où les I_i^δ sont des intervalles ouverts disjoints non vides (une telle décomposition existe d'après III).

2 - Montrer que les valeurs de f aux bords des intervalles I_i^δ sont u-δ ou u+δ.

3 - Montrer que si E est fini, $T_u + F_u$ est fini également.

.../...

4 - On suppose que $T_u + F_u = Z_u$ est fini. On note N_u l'ensemble :

$$N_u = \{t \in]0,1[,\ f(t) = u\}, \qquad \text{de cardinal } Z_u.$$

Montrer qu'il existe δ_0 tel que pour $\delta < \delta_0$ chaque intervalle I_i^δ contient au plus un point de N_u.

5 - On suppose dans cette question que E est fini.

a) Montrer que les intervalles I_i^δ se répartissent en trois catégories exclusives :

(i) les deux valeurs aux deux extrémités sont différentes,
(ii) les deux valeurs aux deux extrémités sont égales et I_i^δ ne contient pas de point de franchissement,
(iii) les deux valeurs aux deux extrémités sont égales et l'intervalle contient un nombre pair de points de franchissement.

b) Montrer qu'une fonction continue sans extremum local est monotone.

c) On pose : $$\Phi_u^\delta\left(I_i^\delta\right) = \frac{1}{2\delta}\int_{I_i^\delta} |f'(t)|\ dt.$$

De la même manière on définit $\Phi_u^\delta(\mathcal{O}_\delta)$, que l'on note Φ_u^δ. On note $E\left(I_i^\delta\right)$ le nombre d'extrema locaux de f sur I_i^δ.

Montrer :
- Si I_i^δ vérifie (i) $\Phi_u^\delta\left(I_i^\delta\right) \leqslant \left[1 + E\left(I_i^\delta\right)\right]$.
- Si I_i^δ vérifie (ii) $\Phi_u^\delta\left(I_i^\delta\right) \leqslant \left[1 + E\left(I_i^\delta\right)\right]/2$.
- Si I_i^δ vérifie (iii) $\Phi_u^\delta\left(I_i^\delta\right) \leqslant \left[1 + E\left(I_i^\delta\right)\right]$.

d) En déduire : $\forall\ \delta,\ \Phi_u^\delta \leqslant F_u + E$.

6 - On suppose que E est fini et que $T_u = 0$. Montrer : $\lim_{\delta \to 0} \Phi_u^\delta = F_u$.

7 - On suppose seulement que E est fini. Montrer : $\lim_{\delta \to 0} \Phi_u^\delta = F_u + T_u = Z_u$.

8 - On suppose seulement que Z_u est fini. Montrer : $Z_u \leqslant \lim_{\delta \to 0} \inf \Phi_u^\delta$

9 - On suppose que $Z_u = +\infty$. Montrer : $\Phi_u^\delta \to +\infty$ quand $\delta \to 0$

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail